МАТЕМАТИКА

УДК 519.718

М. А. Алехина

СИНТЕЗ НАДЕЖНЫХ СХЕМ ПРИ КОНСТАНТНЫХ НЕИСПРАВНОСТЯХ НА ВХОДАХ И ВЫХОДАХ ЭЛЕМЕНТОВ[1]

Аннотация.

Актуальность и цели. Рассматривается реализация булевых функций схемами из ненадежных функциональных элементов в базисе, состоящем из одной функции – штрих Шеффера. Задача синтеза надежных схем, реализующих булевы функции, при константных неисправностях одного типа (например, только типа 0 на входах элементов) решалась ранее автором во многих статьях, но, в отличие от них, в этой работе впервые исследуется модель, в которой каждый элемент схемы может быть подвержен константным неисправностям сразу четырех типов: типа 0 и типа 1 на входах и выходах (с различными вероятностями). Заметим также, что при подходящем выборе параметров эта модель описывает инверсные неисправности элементов на входах и (или) выходах. Цель работы – построить надежные схемы, получить верхние и нижние оценки ненадежности схем.

Материалы и методы. При построении надежных схем использованы ранее известные методы синтеза и получения оценок ненадежности.

Результаты. Получена верхняя оценка ненадежности схем. Описан класс функций K, содержащий почти все булевы функции, и доказана нижняя оценка ненадежности схем, реализующих функции из этого класса. Для функции из класса K построена схема, верхняя и нижняя оценки ненадежности которой асимптотически равны. Полученные результаты могут быть использованы при проектировании технических систем для повышения их надежности.

Выводы. Почти любую булеву функцию можно реализовать схемой, верхняя и нижняя оценки ненадежности которой асимптотически равны.

Ключевые слова: ненадежные функциональные элементы, надежность схемы, ненадежность схемы, константные неисправности типа 0 и 1 на входах и выходах элементов.

M. A. Alehina

SYNTHESIS OF RELIABLE CIRCUITS AT CONSTANT FAILURES AT GATES' INPUTS AND OUTPUTS

Abstract.

Background. The article considers realization of Boolean functions by circuits made of unreliable functional gates in a basis, consisting of a single function – the Sheffer function. The problem of synthesis of reliable circuits, realizing Boolean functions at constant failures of similar type (for example, only of 0 type at gates' inputs) was solved by the author in many articles, but unlike the previous articles, this one considers a model where each circuit gate may be subject to constant fail-

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 14-01-00273.

ures of 4 types at once: type 0 and type 1 at inputs and outputs (with different probabilities). One should also note that having a proper choice of parameters the model describes inverse failures of gates at inputs and (or) outputs. The aim of the work is to build reliable circuits and to obain the upper and lower values of circuit unreliability.

Materials and methods. When building reliable circuits the author used the previously known methods of synthesis and obtainment of unreliability values.

Results. The author obtained the upper value of circuit unreliability, described the *K* function class, containing almost all Boolean functions, and proved the lower value of unreliability of circuits, realizing the functions of the given class. For *K* class functions the author built a circuit, the upper and lower unreliability values of which are asymptotically equal. The obtained results may be used in design of technical systems for their reliability improvement.

Conclusions. Almost any Boolean function may be realized by a circuit, the lower and upper unreliability values of which are asymptotically equal.

Key words: unreliable functional gates, reliability of circuits, unreliability of circuits, constant failures of type 0 and type 1 at gates' inputs and outputs.

Введение

Впервые задачу синтеза надежных схем из ненадежных функциональных элементов рассматривал Дж. фон Нейман [1]. Он также предполагал, что все базисные элементы с вероятностью ε ($\varepsilon \in (0;1/2)$) подвержены инверсным неисправностям на выходах т в неисправные состояния независимо друг от друга. Задача синтеза надежных схем, реализующих булевы функции, при константных неисправностях одного типа (например, только типа 0 на входах элементов) решена в базисах из двухвходовых элементов [2] при неисправностях двух типов [3]. Отметим также работу [4], в которой решена задача синтеза надежных программ с оператором условной остановки. В работе [5] описаны свойства булевых функций, схемы которых можно использовать для повышения надежности исходных схем.

В данной статье впервые исследуется модель, в которой каждый элемент схемы может быть подвержен константным неисправностям четырех типов: типа 0 и типа 1 на входах и выходах (с различными вероятностями). Заметим также, что инверсные неисправности элементов являются частным случаем в рассматриваемой модели неисправностей.

Рассмотрим реализацию булевых функций схемами из ненадежных элементов в базисе $\{x \mid y\}$ (где $x \mid y = \overline{x \,\&\, y}$ – штрих Шеффера, или антиконъюнкция). Схема из ненадежных функциональных элементов реализует функцию $f(x_1,...,x_n)$ $(n \in \mathbf{N})$, если при поступлении на входы схемы набора $\tilde{a}^n = (a_1,...,a_n)$ при отсутствии неисправностей в схеме на ее выходе появляется значение $f(\tilde{a}^n)$. Предполагаем, что в каждый такт работы схемы на любом из входов и выходе любого из ее элементов независимым образом могут происходить константные неисправности: типа 0 на входах с вероятностью γ_0, $\gamma_0 \in (0,1/32)$, или типа 1 на входах с вероятностью γ_1, $\gamma_1 \in (0,1/16)$, или типа 0 на выходах с вероятностью ε_0, $\varepsilon_0 \in (0,1/16)$, или типа 1 на выходах с вероятностью ε_1, $\varepsilon_1 \in (0,1/16)$.

Неисправности типа 0 *на входах элементов* характеризуются тем, что в исправном состоянии функциональный элемент реализует приписанную ему булеву функцию $x \mid y$, а в неисправном – поступающий на его вход нуль не искажается, а поступающая на его вход единица с вероятностью γ_0 может превратиться в нуль. Аналогично определяются неисправности типа 1 на входах.

Неисправности типа 0 *на выходах элементов* характеризуются тем, что в исправном состоянии функциональный элемент реализует приписанную ему булеву функцию $x \mid y$, а в неисправном – с вероятностью ε_0 константу 0. Аналогично определяются неисправности типа 1 на выходах.

Пусть схема S реализует булеву функцию $f(\tilde{x}^n)$. Обозначим через $P_{\overline{f(\tilde{a}^n)}}(S,\tilde{a}^n)$ вероятность появления значения $\overline{f(\tilde{a}^n)}$ на выходе схемы S при входном наборе $\tilde{a}^n$. *Ненадежность* $P(S)$ схемы S определяется как максимальное из чисел $P_{\overline{f(\tilde{a}^n)}}(S,\tilde{a}^n)$ по всем входным наборам $\tilde{a}^n$ схемы S, т.е. $P(S) = \max\left\{P_{\overline{f(\tilde{a}^n)}}(S,\tilde{a}^n)\right\}$. *Надежность* схемы S равна $1 - P(S)$.

Учитывая характер рассматриваемых неисправностей, вычислим вероятности появления ошибок на выходе базисного элемента E при всех входных наборах этого элемента:

$$P_0(E,(00)) = \gamma_1^2(1-\varepsilon_1) + (1-\gamma_1^2)\varepsilon_0,$$

$$P_0(E,(01)) = P_0(E,(10)) = \gamma_1(1-\gamma_0)(1-\varepsilon_1) + (1-\gamma_1(1-\gamma_0))\varepsilon_0,$$

$$P_1(E,(11)) = (1-\gamma_0)^2\varepsilon_1 + (2\gamma_0 - \gamma_0^2)(1-\varepsilon_0).$$

Замечание 1. Отметим, что при подходящем выборе параметров $\gamma_0, \gamma_1, \varepsilon_0, \varepsilon_1$ можно описать неисправности одного типа, например:

1) если $\gamma_0 = \gamma_1 = \varepsilon_1 = 0$, то получим неисправности типа 0 на выходах элементов с вероятностью ε_0;

2) если $\gamma_0 = \gamma_1 = \varepsilon_0 = 0$, то получим неисправности типа 1 на выходах элементов с вероятностью ε_1;

3) если $\gamma_1 = \varepsilon_1 = \varepsilon_0 = 0$, то получим неисправности типа 0 на входах элементов с вероятностью γ_0;

4) если $\gamma_0 = \varepsilon_1 = \varepsilon_0 = 0$, то получим неисправности типа 1 на входах элементов с вероятностью γ_1;

кроме того

5) если $\gamma_0 = \gamma_1 = 0$ и $\varepsilon_0 = \varepsilon_1$, то получим инверсные неисправности на выходах элементов с вероятностью ε_0;

6) если $\gamma_0 = \gamma_1$ и $\varepsilon_0 = \varepsilon_1 = 0$, то получим инверсные неисправности на входах элементов с вероятностью γ_0.

Таким образом, предлагаемая модель описывает все наиболее известные типы неисправностей элементов.

Обозначим $P_0(E,(00))$, $P_0(E,(01))$, $P_0(E,(10))$, $P_1(E,(11))$ через $\alpha, \beta, \delta, \tau$ соответственно. Поскольку в нашем случае $\beta = \delta$, ненадежность $P(E)$ элемента E равна $P(E) = \max\{\alpha, \beta, \tau\} \le \max\{\gamma_1 + \varepsilon_0, 2\gamma_0 + \varepsilon_1\}$. Обозначим через $\varepsilon = \max\{\gamma_1 + \varepsilon_0, 2\gamma_0 + \varepsilon_1\}$. Очевидно, что $P(E) \le \varepsilon$.

Верхняя оценка ненадежности схем

Пусть f – произвольная булева функция; S – схема, реализующая функцию f. Возьмем два экземпляра схемы S и соединим их выходы со входами базисного элемента. Построенную схему обозначим $\psi(S)$. Очевидно, что эта схема реализует функцию $\bar{f}$. Возьмем два экземпляра схемы $\psi(S)$ и соединим их выходы со входами еще одного базисного элемента. Полученную схему обозначим $\Psi(S)$. Очевидно, что схема $\Psi(S)$ реализует исходную функцию f.

Теорема 1 [2]. Пусть f – произвольная булева функция, а S – любая схема, реализующая f. Тогда схема $\Psi(S)$ реализует функцию f с ненадежностью

$$P(\Psi(S)) \le \max\{2\alpha + \tau + 2(\beta + \delta)P(S) + 2P^2(S),$$

$$\alpha + (\beta + \delta)(\tau + 2P(S)) + (\tau + 2P(S))^2\},$$

где $P(S)$ – ненадежность схемы S.

Из теоремы 1 следует теорема 2, если вместо $\alpha, \beta, \delta, \tau$ подставить вычисленные выше вероятности ошибок на выходе базисного элемента, отбросить отрицательные слагаемые и заменить множители вида $(1 - p)$ на 1.

Теорема 2. Пусть f – произвольная булева функция, а S – любая схема, реализующая f. Тогда схема $\Psi(S)$ реализует функцию f с ненадежностью

$$P(\Psi(S)) \le \max\Big\{2\varepsilon_0 + 2\gamma_1^2 + \varepsilon_1 + 2\gamma_0 + 4(\varepsilon_0 + \gamma_1)P(S) + 2P^2(S),$$

$$\varepsilon_0 + \gamma_1^2 + 2(\varepsilon_0 + \gamma_1)(2\gamma_0 + \varepsilon_1 + 2P(S)) + (2\gamma_0 + \varepsilon_1 + 2P(S))^2\Big\},$$

где $P(S)$ – ненадежность схемы S.

Теорема 3 справедлива для произвольных неисправностей элементов.

Теорема 3 [2]. Пусть в произвольном полном конечном базисе схема A реализует функцию $\{x \mid y\}$ и $P(A) \le \mu$. Тогда любую булеву функцию f в этом базисе можно реализовать такой схемой B, что при всех $\mu \in (0, 1/160]$ верно неравенство $P(B) \le 4\mu$.

Применительно к рассматриваемым базису и неисправностям элементов из теоремы 3 получаем теорему 4, если вместо μ подставим ε.

Теорема 4. В базисе $\{x \mid y\}$ любую булеву функцию f можно реализовать такой схемой B, что при всех $\varepsilon \in (0,1/160]$ верно неравенство $P(B) \le 4\varepsilon$.

Из теорем 2 и 4 следует теорема 5.

Теорема 5. В базисе $\{x \mid y\}$ любую булеву функцию f можно реализовать такой схемой B, что при всех $\varepsilon \in (0,1/160]$ верно неравенство

$$P(B) \le 2\varepsilon_0 + 2\gamma_1^2 + 2\gamma_0 + \varepsilon_1 + 73\varepsilon^2.$$

Доказательство. Пусть f – произвольная булева функция. По теореме 4 функцию f можно реализовать схемой A с ненадежностью $P(A) \le 4\varepsilon$ при всех $\varepsilon \in (0,1/160]$. По схеме A построим схему $\Psi(A)$ и оценим ее ненадежность по теореме 2, учитывая условия: $\varepsilon_0 + \gamma_1^2 \le \varepsilon_0 + \gamma_1 \le \varepsilon$, $2\gamma_0 + \varepsilon_1 \le \varepsilon$, $99\varepsilon^2 \le \varepsilon$ при $\varepsilon \in (0,1/160]$. Получаем неравенство

$$P(\Psi(A)) \le \max\left\{2\varepsilon_0 + 2\gamma_1^2 + 2\gamma_0 + \varepsilon_1 + 48\varepsilon^2, \varepsilon_0 + \gamma_1^2 + 99\varepsilon^2\right\} \le$$

$$\le \max\left\{3\varepsilon + 48\varepsilon^2, 2\varepsilon\right\} \le 3\varepsilon + 48/160\varepsilon = 3{,}3\varepsilon .$$

По схеме $\Psi(A)$ построим схему $\Psi(\Psi(A))$, которую обозначим через $\Psi^2(A)$. Оценим ее ненадежность, используя теорему 2:

$$P(\Psi^2(A)) \le \max\left\{2\varepsilon_0 + 2\gamma_1^2 + 2\gamma_0 + \varepsilon_1 + 35\varepsilon^2, \varepsilon_0 + \gamma_1^2 + 73\varepsilon^2\right\} \le$$

$$\le 2\varepsilon_0 + 2\gamma_0 + \varepsilon_1 + 2\gamma_1^2 + 73\varepsilon^2 .$$

Схема $\Psi^2(A) = B$ – искомая.

Теорема 5 доказана.

Результат теоремы 5 можно улучшить, но придется наложить на ε более жесткое ограничение.

Теорема 6. В базисе $\{x \mid y\}$ любую булеву функцию f можно реализовать такой схемой B, что ее ненадежность при всех $\varepsilon \in (0,1/1000]$ удовлетворяет неравенству

$$P(B) \le c + 4c(\varepsilon_0 + \gamma_1 + 2\gamma_0 + \varepsilon_1) + 2358\varepsilon^3,$$

где $c = 2\varepsilon_0 + 2\gamma_1^2 + 2\gamma_0 + \varepsilon_1$.

Доказательство. Пусть f – произвольная булева функция. По теореме 5 функцию f можно реализовать схемой A с ненадежностью $P(A) \le c + 73\varepsilon^2$ при всех $\varepsilon \in (0,1/1000]$. По схеме A построим схему $\Psi(A)$ и оценим ее ненадежность по теореме 2:

$$P(\Psi(A)) \le \max\left\{c + 4(\varepsilon_0 + \gamma_1)\left(c + 73\varepsilon^2\right) + 2\left(c + 73\varepsilon^2\right)^2,\right.$$

$$\varepsilon_0+\gamma_1^2+2(\varepsilon_0+\gamma_1)\left(2\gamma_0+\varepsilon_1+2c+146\varepsilon^2\right)+\left(2\gamma_0+\varepsilon_1+2c+146\varepsilon^2\right)^2\Big\}.$$

Оценим сверху каждое из двух выражений под знаком максимума, учитывая условия: $\varepsilon_0+\gamma_1\le\varepsilon$, $c\le 3\varepsilon$:

$$c+4(\varepsilon_0+\gamma_1)\left(c+73\varepsilon^2\right)+2\left(c+73\varepsilon^2\right)^2\le$$

$$\le c+4c(\varepsilon_0+\gamma_1)+4\varepsilon\cdot 73\varepsilon^2+2c^2+4\cdot 73c\varepsilon^2+2\cdot 73^2\varepsilon^4\le$$

$$\le c+4c(\varepsilon_0+\gamma_1)+2c^2+1168\varepsilon^3+10658\varepsilon^4;$$

$$\varepsilon_0+\gamma_1^2+2(\varepsilon_0+\gamma_1)\left(2\gamma_0+\varepsilon_1+2c+146\varepsilon^2\right)+\left(2\gamma_0+\varepsilon_1+2c+146\varepsilon^2\right)^2=$$

$$=\varepsilon_0+\gamma_1^2-(\varepsilon_0+\gamma_1)^2+\left(\varepsilon_0+\gamma_1+2\gamma_0+\varepsilon_1+2c+146\varepsilon^2\right)^2=$$

$$=\varepsilon_0-\varepsilon_0^2-2\varepsilon_0\gamma_1+(d+2c)^2+2(d+2c)\cdot 146\varepsilon^2+\left(146\varepsilon^2\right)^2,$$

где $d=\varepsilon_0+\gamma_1+2\gamma_0+\varepsilon_1$.

Заметим, что $d\le 2\varepsilon$, $d+2c\le 8\varepsilon$. Поэтому верно неравенство

$$\varepsilon_0-\varepsilon_0^2-2\varepsilon_0\gamma_1+(d+2c)^2+2(d+2c)\cdot 146\varepsilon^2+\left(146\varepsilon^2\right)^2\le$$

$$\le\varepsilon_0+(d+2c)^2+2336\varepsilon^3+21316\varepsilon^4.$$

Таким образом, получаем соотношение

$$P(\Psi(A))\le\max\Big\{c+4c(\varepsilon_0+\gamma_1)+2c^2+1168\varepsilon^3+10658\varepsilon^4,$$

$$\varepsilon_0+(d+2c)^2+2336\varepsilon^3+21316\varepsilon^4\Big\}\le$$

$$\le\max\left\{c+4c(\varepsilon_0+\gamma_1)+2c^2,\varepsilon_0+(d+2c)^2\right\}+2336\varepsilon^3+21316\varepsilon^4.$$

Найдем оценку для $\max\left\{c+4c(\varepsilon_0+\gamma_1)+2c^2,\varepsilon_0+(d+2c)^2\right\}$:

$$\max\left\{c+4c(\varepsilon_0+\gamma_1)+2c^2,\varepsilon_0+(d+2c)^2\right\}=$$

$$=\max\left\{c+4c(\varepsilon_0+\gamma_1)+2c^2,\varepsilon_0+d^2+4cd+4c^2\right\}\le\max\left\{c,\varepsilon_0+d^2\right\}+4cd+4c^2.$$

Рассмотрим разность $c-(\varepsilon_0+d^2)$:

$$c-(\varepsilon_0+d^2)=2\varepsilon_0+2\gamma_1^2+2\gamma_0+\varepsilon_1-\varepsilon_0-(\varepsilon_0+\gamma_1)^2-$$

$$-2(\varepsilon_0+\gamma_1)(2\gamma_0+\varepsilon_1)-(2\gamma_0+\varepsilon_1)^2=\varepsilon_0+\gamma_1^2-2\varepsilon_0\gamma_1-\varepsilon_0^2+$$

$$+(2\gamma_0+\varepsilon_1)(1-2(\varepsilon_0+\gamma_1)-(2\gamma_0+\varepsilon_1))=$$

$$=\gamma_1^2+\varepsilon_0(1-\varepsilon_0-2\gamma_1)+(2\gamma_0+\varepsilon_1)(1-2(\varepsilon_0+\gamma_1)-(2\gamma_0+\varepsilon_1))\geq 0,$$

поскольку каждое слагаемое в этой сумме неотрицательно при $\gamma_0 \in (0,1/32)$, $\gamma_1 \in (0,1/16)$, $\varepsilon_0 \in (0,1/16)$ и $\varepsilon_1 \in (0,1/16)$.

Следовательно, $\max\{c, \varepsilon_0 + d^2\} = c$, поэтому

$$P(\Psi(A)) \leq c + 4c(\varepsilon_0+\gamma_1+2\gamma_0+\varepsilon_1) + 2336\varepsilon^3 + 21316\varepsilon^4 \leq$$

$$\leq c + 4c(\varepsilon_0+\gamma_1+2\gamma_0+\varepsilon_1) + 2358\varepsilon^3 \text{ при всех } \varepsilon \in (0,1/1000].$$

Схема $\Psi(A) = B$ – искомая.

Теорема 6 доказана.

Следствие 1. Любую булеву функцию можно реализовать такой схемой, что ее ненадежность асимптотически не больше, чем $2\varepsilon_0 + 2\gamma_1^2 + 2\gamma_0 + \varepsilon_1$ при $\gamma_0, \gamma_1, \varepsilon_0, \varepsilon_1 \to 0$.

Нижняя оценка ненадежности схем

Пусть f – произвольная булева функция, отличная от константы, и S – любая схема, ее реализующая. Без ограничения общности можно считать, что функция f зависит от n переменных $x_1,...,x_n$ $(n \in \mathbf{N})$, т.е. имеем функцию $f(\tilde{x}^n)$. Пусть подсхема C схемы S содержит выход схемы S и реализует булеву функцию $f'(\tilde{y}^m)\,(m \in \mathbf{N})$ с ненадежностью $P(C) \leq 1/2$. Обозначим p^1 – минимум вероятностей ошибок на выходе схемы C по таким входным наборам $\tilde{b}^m$, что $f'(\tilde{b}^m) = 0$. Аналогично p^0 – минимум вероятностей ошибок на выходе схемы C по таким входным наборам $\tilde{b}^m$, что $f'(\tilde{b}^m) = 1$. Справедлива лемма 1 [2].

Лемма 1 [2]. Вероятности ошибок на выходе схемы S удовлетворяют неравенствам: $P_1(S,\tilde{a}^n) \geq p^1$, если $f(\tilde{a}^n) = 0$; $P_0(S,\tilde{a}^n) \geq p^0$, если $f(\tilde{a}^n) = 1$.

Замечание 2. Из леммы 1 следует, что $P(S) \geq p^i,\, i \in \{0;1\}$.

Пусть $h(\tilde{x}^n)$ – произвольная булева функция, а $K(n)$ – множество булевых функций вида $f(\tilde{x}^n) = (\overline{x}_i \vee h(\tilde{x}^n))^a$, где $i \in \{1,...,n\}, a \in \{0,1\}$.

Нетрудно проверить, что число функций в классе $K(n)$ не больше $2n2^{2^{n-1}}$, что мало по сравнению с общим числом 2^{2^n} булевых функций от n переменных.

Обозначим $K = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} K(n)$.

Теорема 7. Пусть функция $f \notin K$, а S – любая схема, реализующая f. Тогда при всех $\gamma_0 \in (0,1/32)$, $\gamma_1 \in (0,1/16)$ $\varepsilon_0 \in (0,1/16)$, $\varepsilon_1 \in (0,1/16)$ верно неравенство

$$P(S) \geq (2\alpha + \tau)(1-\tau)m^2,$$

где

$$\alpha = \gamma_1^2(1-\varepsilon_1) + (1-\gamma_1^2)\varepsilon_0, \ \tau = (1-\gamma_0)^2\varepsilon_1 + (2\gamma_0 - \gamma_0^2)(1-\varepsilon_0),$$

$$\beta = \gamma_1(1-\gamma_0)(1-\varepsilon_1) + (1-\gamma_1(1-\gamma_0))\varepsilon_0, \ m = \min\{1-\alpha, 1-\beta\}.$$

Доказательство. Пусть $f \notin K$, а S – любая схема, реализующая f. Выделим в схеме S функциональный элемент E_1, содержащий выход S. Возможны два случая.

1. Входы элемента E_1 соединены с выходами разных элементов E_2 и E_3.

1.1. Выход одного из элементов, например E_2, соединен со входом элемента E_3. Вычислим вероятность P_1 ошибки на выходе подсхемы, состоящей из элементов E_1, E_2 и E_3 на нулевом входном наборе. Заметим, что в этом случае ошибка ровно одного любого из элементов E_1, E_2 и E_3 приводит к ошибке на выходе подсхемы. Поэтому, учитывая условие $\beta = \delta$, получаем неравенство

$$P_1 \geq \min\{\alpha,\beta,\delta\}(1-\alpha)(1-\beta) + \min\{1-\alpha, 1-\beta, 1-\delta\}\delta(1-\tau) +$$

$$+(1-\delta)\min\{1-\alpha,1-\beta,1-\delta\}\tau \geq (\min\{\alpha,\beta,\delta\} + \delta + \tau)m^2 \ \geq (2\alpha+\tau)m^2.$$

Ясно, что $\min P_1 = p^1 \geq (2\alpha+\tau)m^2$, где минимум берется по всем нулевым входным наборам подсхемы, состоящей из элементов E_1, E_2 и E_3.

Ненадежность схемы, состоящей из трех элементов E_1, E_2 и E_3, не больше 3ε, а $3\varepsilon = 3\max\{\gamma_1 + \varepsilon_0, 2\gamma_0 + \varepsilon_1\} \leq 3/8 \leq 1/2$ при $\gamma_0 \in (0,1/32)$, $\gamma_1 \in (0,1/16)$, $\varepsilon_0 \in (0,1/16)$, $\varepsilon_1 \in (0,1/16)$.

Тогда по лемме 1, учитывая замечание 2, верно неравенство $P(S) \geq p^1 \geq (2\alpha+\tau)m^2$.

1.2. Ни выход элемента E_2 не соединен ни с одним из входов элемента E_3, ни выход элемента E_3 не соединен ни с одним из входов элемента E_2.

Вычислим вероятность P_1 ошибки на выходе подсхемы, состоящей из элементов E_1, E_2 и E_3, при поступлении на ее входы нулевого набора. Заметим, что в этом случае ошибка ровно одного любого из элементов E_1, E_2 и E_3 приводит к ошибке на выходе подсхемы, поэтому

$$P_1 \geq \min\{\alpha,\beta,\delta\}\min\{1-\alpha,1-\beta,1-\delta\}(1-\beta) +$$

$$+\min\{1-\alpha,1-\beta,1-\delta\}\min\{\alpha,\beta,\delta\}(1-\delta) +$$

$$+(\min\{1-\alpha, 1-\beta, 1-\delta\})^2 \tau \geq (2\alpha+\tau)m^2.$$

Ясно, что $\min P_1 = p^1 \geq (2\alpha+\tau)m^2$, где минимум берется по всем нулевым входным наборам подсхемы, состоящей из элементов E_1, E_2 и E_3.

Ненадежность схемы, состоящей из трех элементов E_1, E_2 и E_3, не больше 3ε, а $3\varepsilon \leq 1/2$ при $\gamma_0 \in (0,1/32)$, $\gamma_1 \in (0,1/16)$, $\varepsilon_0 \in (0,1/16)$, $\varepsilon_1 \in (0,1/16)$.

Тогда по лемме 1, учитывая замечание 2, верно неравенство $P(S) \geq p^1 \geq (2\alpha+\tau)m^2$.

2. Входы элемента E_1 соединены с выходом одного элемента E_2. Возможны два случая.

2.1. Входы элемента E_2 соединены с выходами разных элементов E_3 и E_4. Тогда (см. п. 1 доказательства) вероятность P_1 ошибки на любом нулевом входном наборе подсхемы, состоящей из элементов E_2, E_3 и E_4, не меньше $(2\alpha+\tau)m^2$. Оценим вероятность ошибки P_0 на выходе подсхемы, состоящей из четырех элементов E_1, E_2 и E_3 и E_4, на единичном входном наборе: $P_0 \geq P_1(1-\tau) \geq (2\alpha+\tau)(1-\tau)m^2$.

Ясно, что $\min P_0 = p^0 \geq (2\alpha+\tau)(1-\tau)m^2$, где минимум берется по всем единичным входным наборам подсхемы, состоящей из элементов E_1, E_2, E_3, E_4.

Ненадежность подсхемы из четырех элементов не больше 4ε, а $4\varepsilon \leq 1/2$ при $\gamma_0 \in (0,1/32)$, $\gamma_1 \in (0,1/16)$, $\varepsilon_0 \in (0,1/16)$, $\varepsilon_1 \in (0,1/16)$. Тогда по лемме 1, учитывая замечание 2, верно неравенство

$$P(S) \geq p^0 \geq (2\alpha+\tau)(1-\tau)m^2.$$

2.2. Оба входа элемента E_2 соединены с выходом одного элемента E_3. Вычислим вероятность ошибки P_0 на любом единичном входном наборе подсхемы, состоящей из элементов E_1, E_2 и E_3.

Заметим, что и в этом случае ошибка ровно одного любого из элементов E_1, E_2 и E_3 приводит к ошибке на выходе подсхемы. Поэтому

$$P_0 \geq \min\{\alpha, \beta, \delta\}(1-\alpha)(1-\tau) + \min\{1-\alpha, 1-\beta, 1-\delta\}\tau(1-\tau) +$$

$$+\min\{1-\alpha, 1-\beta, 1-\delta\}(1-\tau)\alpha \geq \alpha m(1-\tau) + m\tau(1-\tau) + m(1-\tau)\alpha =$$

$$= (2\alpha+\tau)(1-\tau)m.$$

Ясно, что $\min P_0 = p^0 \geq (2\alpha+\tau)(1-\tau)m$, где минимум берется по всем единичным входным наборам подсхемы, состоящей из элементов E_1, E_2 и E_3.

Ненадежность схемы, состоящей из трех элементов E_1, E_2 и E_3, не больше 3ε, а $3\varepsilon \leq 3/8 \leq 1/2$ при $\gamma_0 \in (0,1/32)$, $\gamma_1 \in (0,1/16)$, $\varepsilon_0 \in (0,1/16)$, $\varepsilon_1 \in (0,1/16)$.

Тогда по лемме 1, учитывая замечание 2, верно неравенство

$$P(S) \geq p^0 \geq (2\alpha + \tau)(1-\tau)m.$$

Таким образом, справедливо неравенство

$$P(S) \geq \min\{(2\alpha+\tau)m^2, (2\alpha+\tau)(1-\tau)m^2, (2\alpha+\tau)(1-\tau)m\} = (2\alpha+\tau)(1-\tau)m^2.$$

Теорема 7 доказана.

Следствие 2. Если функция $f \notin K$, а S – любая схема, реализующая f, то ненадежность $P(S)$ схемы S асимптотически не меньше, чем $2\varepsilon_0 + 2\gamma_0 + \varepsilon_1 + 2\gamma_1^2$ при $\gamma_0, \gamma_1, \varepsilon_0, \varepsilon_1 \to 0$.

Доказательство. Пусть $f \notin K$, а S – любая схема, реализующая f. По теореме 7 верно неравенство $P(S) \geq (2\alpha+\tau)(1-\tau)m^2$.

Очевидно, что $(2\alpha+\tau)(1-\tau)m^2 \sim 2\alpha+\tau \sim 2\varepsilon_0 + 2\gamma_0 + \varepsilon_1 + 2\gamma_1^2$ при γ_0, γ_1, ε_0, $\varepsilon_1 \to 0$. Поэтому $P(S) \gtrsim 2\varepsilon_0 + 2\gamma_0 + \varepsilon_1 + 2\gamma_1^2$ при $\gamma_0, \gamma_1, \varepsilon_0, \varepsilon_1 \to 0$.

Следствие 2 доказано.

Выводы

Любую булеву функцию можно реализовать схемой, ненадежность которой асимптотически не больше $2\varepsilon_0 + 2\gamma_0 + \varepsilon_1 + 2\gamma_1^2$ при $\gamma_0, \gamma_1, \varepsilon_0, \varepsilon_1 \to 0$.

Для почти любой функции f ($f \notin K$) такая схема функционирует с ненадежностью, асимптотически равной $2\varepsilon_0 + 2\gamma_0 + \varepsilon_1 + 2\gamma_1^2$ при $\gamma_0, \gamma_1, \varepsilon_0, \varepsilon_1 \to 0$, т.е. оценку $2\varepsilon_0 + 2\gamma_0 + \varepsilon_1 + 2\gamma_1^2$ ненадежности схем нельзя понизить для функций $f \notin K$.

Список литературы

1. **Neuman, von J.** Probabilistic logics and the synthesis of reliable organisms from unreliable components / J. von Neuman // Automata studies / ed. by C. Shannon, Mc. Carthy. – Princeton : Princeton University Press, 1956. – P. 43–98.
2. **Алехина, М. А.** Синтез асимптотически оптимальных по надежности схем : моногр. / М. А. Алехина. – Пенза : Инф.-изд. центр ПензГУ, 2006. – 156 с.
3. **Алехина, М. А.** О ненадежности схем из функциональных элементов, подверженных двум типам неисправностей / М. А. Алехина, О. Ю. Барсукова // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2013. – № 3 (27). – С. 31–47.
4. **Грабовская, С. М.** О надежности неветвящихся программ с ненадежным оператором условной остановки в произвольном полном конечном базисе / С. М. Грабовская // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2011. – № 3 (19). – С. 52–60.
5. **Alekhina, M. A.** Synthesis and complexity of asymptotically optimal circuits with unreliable gates / M. A. Alekhina // Fundamenta Informaticae. – 2010. – Vol. 104 (3). – P. 219–225.

References

1. Neuman von J. *Automata studies*. Princeton: Princeton University Press, 1956, pp. 43–98.

2. Alekhina M. A. *Sintez asimptoticheski optimal'nykh po nadezhnosti skhem: monogr.* [Synthesis of asymptotically reliability-optimal circuits: monograph]. Penza: Inf.-izd. tsentr PenzGU, 2006, 156 p.
3. Alekhina M. A., Barsukova O. Yu. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2013, no. 3 (27), pp. 31–47.
4. Grabovskaya S. M. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2011, no. 3 (19), pp. 52–60.
5. Alekhina M. A. *Fundamenta Informaticae*. 2010, vol. 104 (3), pp. 219–225.

Алехина Марина Анатольевна
доктор физико-математических наук, профессор, заведующая кафедрой дискретной математики, Пензенский государственный университет (Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

Alekhina Marina Anatol'evna
Doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of sub-department of discrete mathematics, Penza State University (40 Krasnaya street, Penza, Russia)

E-mail: alehina@pnzgu.ru

УДК 519.718
Алехина, М. А.
Синтез надежных схем при константных неисправностях на входах и выходах элементов / М. А. Алехина // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2015. – № 2 (34). – С. 5–15.